

# 臺北市立建國高級中學 114 學年度科學班甄選入學科學能力檢定 【數學能力檢定】試題本

請不要翻到次頁!!

讀完本頁說明，聽從監試委員的指示，才開始作答!

歡迎參加建國高級中學第17屆科學班入班鑑定(入學後為建國高級中學第80屆學生)

## 注意事項

1. 請檢查桌面上已放置「試題本」與「答案卷」各一份。
2. 請核對「答案卷」左上角的號碼與自己的甄選證號碼末 5 碼是否一致，若有錯誤請立即舉手請求查對更正。
3. 可利用「試題本」空白處計算。
4. 試題中參考的附圖，不一定代表實際大小。作答時，不可使用有量角功能之工具。
5. 交卷時，「試題本」務必連同「答案卷」一併送交監試人員，然後離場。
6. 故意損壞試題本(卷)，或於答案卡(卷)上挖補、汙損、折疊、作標記、顯示自己身分者，該節甄試科目不予計分。

## 測驗說明

1. 考試時間為 100 分鐘。
2. 「試題本」採單面印刷，共 3 頁(不含封面)。多選題共 1 題，填充題共 6 題，計算證明題共 4 題。
3. 「答案卷」採單面印刷，共 5 頁(不含封面)。

## 作答方式

1. 答案須依題號寫在答案卷上，否則不予計分，更正時，可以使用修正液(帶)。
2. 未使用藍、黑色鋼筆或原子筆書寫於「答案卷」，或書寫不清，致評閱人員無法辨識答案，其責任自行負責，不得提出異議。

請聽到考試開始的信號聲後，於「試題本」右上角方格內填入自己的甄選證號碼末 5 碼，再翻頁作答。

# 臺北市立建國高級中學 114 學年度科學班甄選入學科學能力檢定

## 【數學能力檢定】試題本

一、多選題：每題 8 分，共 8 分。答案須依題號寫在答案卷上，否則不予計分。

說明

(1) 每題的五個選項各自獨立，其中至少有一個選項是正確的。每題皆不倒扣，五個選項全部答對者得 8 分，只答錯一個選項者可得 4 分，答錯兩個或兩個以上選項者不給分；所有選項均未作答者，該題以零分計算。

(2) 答錯選項的定義為「沒選正確的選項或選了不正確的選項」。

1. 如圖所示，在正方形  $ABCD$  中，點  $E, G$  分別是  $\overline{BC}, \overline{AD}$  線段上的動點，且都不是端點，設  $\overline{EC} = \overline{GD}$ ， $\triangle BEF$  為等腰直角三角形，其中  $\overline{BE}$  為斜邊，連接  $\overline{CF}$  並延長交  $\overline{AB}$  於點  $H$ ，連接  $\overline{GC}, \overline{GH}$ ，請選出正確的選項。

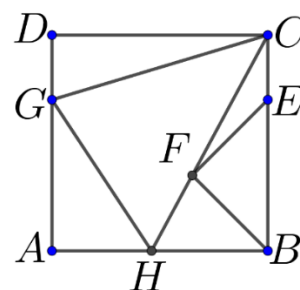
(1)  $\overline{FC} > \overline{FG}$

(2)  $\angle HCG$  角度的大小為定值

(3)  $\triangle AHG$  的周長小於  $2\overline{AB}$

(4)  $\frac{\overline{GF}}{\overline{FH}} = 1 + 2 \times \frac{\overline{EC}}{\overline{BE}}$

(5) 若  $\overline{EC} = \overline{GD} = \frac{1}{3}\overline{AB}$ ，則  $\frac{\overline{HB}}{\overline{BC}} = \frac{3}{5}$

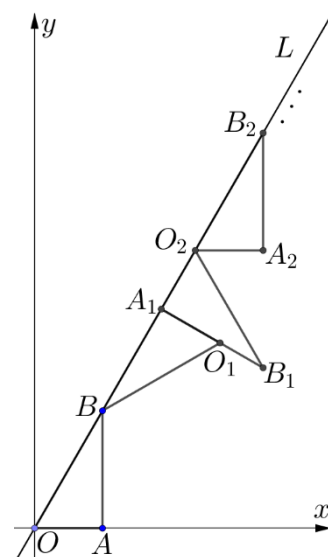


二、填充題：每題 8 分，共 48 分。答案須依題號寫在答案卷上，否則不予計分。

1. 下列  $3 \times 3$  的方格中，每個方格可以填上一個正實數，目前已填上 25 與 16 兩個數，位置如下所示，若將剩餘的數填滿後，使其滿足在同一列的三個數乘積為 1，且同一行的三個數乘積也為 1，以及在對角線上的三個數乘積亦為 1，即共有 8 個三個數乘積為 1 的條件，則未知數  $x$  的值為\_\_\_\_\_。

|     |    |    |
|-----|----|----|
|     | 25 |    |
|     |    | 16 |
| $x$ |    |    |

2. 如右圖所示：在坐標平面上， $O$  為原點，點  $A(1,0)$ ，點  $B(1, \sqrt{3})$ ，設直線  $L$  過  $O, B$  兩點，將  $\triangle OAB$  繞點  $B$  逆時針旋轉到  $\triangle O_1A_1B$ ，使點  $A$  的對應點  $A_1$  落在直線  $L$  上，且點  $O$  對應到點  $O_1$ ，再將  $\triangle O_1A_1B$  繞點  $A_1$  逆時針旋轉到  $\triangle O_2A_1B_1$ ，使點  $O_1$  的對應點  $O_2$  落在直線  $L$  上，且點  $B$  對應到點  $B_1$ ，...，依此規則進行下去，則點  $A_8$  的坐標為\_\_\_\_\_。



3. 設  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{16}$  皆為整數，且  $\frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_{16}^2}{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{16}} = 16$ ，則符合條件的  $a_1$  之最大值為\_\_\_\_\_。

4. 假設一直角  $\triangle ABC$  的面積為  $P$ ，且  $\triangle ABC$  之內切圓的面積為  $Q$ ，若  $P^2 = 144Q$ ，則  $\triangle ABC$  的周長為\_\_\_\_\_。(圓周率用  $\pi$  表示，答案為一個值，不要用  $P$ 、 $Q$  來表示)

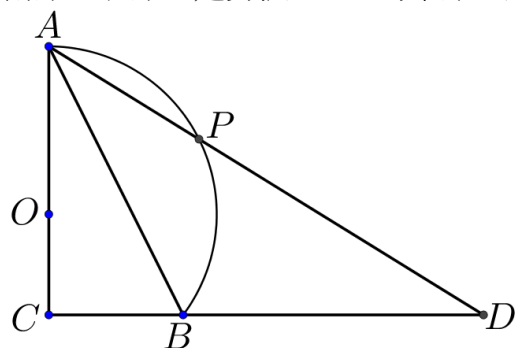
5. 設  $x, y$  皆為正整數，且  $x + y^2 + 8 = 2xy$ ，則  $x$  的值為\_\_\_\_\_。(答案不只一個解)  
(注意：只需回答  $x$  的值，不要寫出  $y$  的值)

6. 設  $n$  位數  $a_1 a_2 a_3 a_4 \dots a_n$  的每個位數  $a_i$  均滿足  $1 \leq a_i \leq 3$ ，且每一位數字均至少有一個相鄰位數上的數字與其奇偶性相同。滿足上述條件的  $n$  位數的偶數與奇數，分別稱為  $n$  位好偶數與  $n$  位好奇數。設  $n$  位好偶數有  $E_n$  個， $n$  位好奇數有  $O_n$  個，其中  $n \geq 2$ 。例如：131 為 3 位好奇數、1322 為 4 位好偶數、22213 為 5 位好奇數、223322 為 6 位好偶數，且 211 不是 3 位好奇數、132 不是 3 位好偶數。則  $E_7 =$ \_\_\_\_\_。

三、計算證明題：本大題共有四題計算證明題，必須寫出演算過程或理由，否則將予

扣分。每題配分標於題末，共 44 分。

1. 如下圖所示，在  $\triangle ABC$  中， $\angle C = 90^\circ$ ， $\overline{BC} = 4$ ， $\overline{AC} = 8$ ，已知點  $O$  在  $\overline{AC}$  上，以點  $O$  為圓心的圓過  $A, B$  兩點，若點  $P$  是劣弧  $AB$  上的中點，延長  $\overline{AP}$  交  $\overline{CB}$  的延長線於點  $D$ ，試回答下列各小題。



- (1) 試求  $\overline{OP}$  的長度。(2 分)
- (2) 試求  $\overline{AP}^2$  的值。(注意：是回答  $\overline{AP}$  長度的平方)(4 分)
- (3) 試求  $\overline{BD}$  的長度。(6 分)

2. 有一個項數大於 4 的數列  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ ，它的每一項都只能是 0 或 1，且滿足：

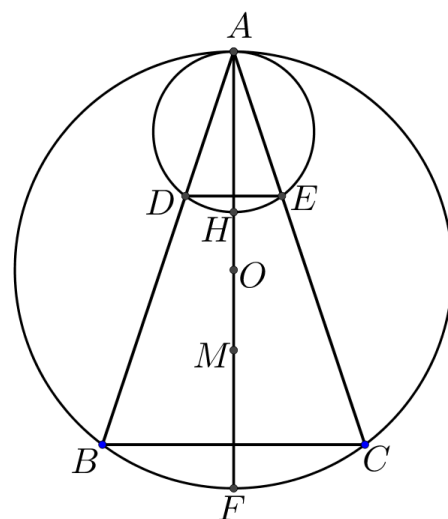
對於所有的正整數  $k$ ， $1 \leq k \leq n-1$ ， $a_1 a_{k+1} + a_2 a_{k+2} + a_3 a_{k+3} + \dots + a_{n-k} a_n$  都是奇數。

試回答下列問題：

- (1) 試求  $a_1$  與  $a_n$  的值。(2 分)
- (2) 試證明： $a_2 + a_{n-1} = 1$ 。(2 分)
- (3) 試找出所有滿足條件且項數等於 7 的數列。(6 分)

3. 如右下圖所示，已知  $\triangle ABC$  中， $\overline{AB} = \overline{AC}$ ， $D, E$  分別在  $\overline{AB}$  及  $\overline{AC}$  上，且  $\overline{DB} = \overline{BC} = \overline{CE}$ 。  $O$  為  $\triangle ABC$  外接圓的圓心，且直線  $\overline{OA}$  分別交  $\triangle ADE$  外接圓及  $\triangle ABC$  外接圓於  $H, F$  兩點(皆異於點  $A$ )， $M$  是線段  $\overline{FH}$  的中點，試回答下列問題：

- (1) 證明： $\frac{\overline{FH}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{AF}}{\overline{AB}}$ 。(4 分)
- (2) 證明： $\frac{\overline{AF}}{\overline{AB}} = \frac{2\overline{BF}}{\overline{BC}}$ 。(4 分)
- (3) 證明： $\angle ABM = \angle MBC$ 。(4 分)



4. 對於任意實數  $x$ ，我們以符號  $[x]$  表示小於或等於  $x$  的最大整數，例如： $[2] = 2$ ， $[1.5] = 1$ ，

$[-2.5] = -3$ 。試求  $\left[\frac{1}{3}\right] + \left[\frac{2}{3}\right] + \left[\frac{4}{3}\right] + \dots + \left[\frac{2^{18}}{3}\right] + \left[\frac{2^{19}}{3}\right]$  的值。(請算出值，不要用符號表示)(10 分)