

臺北市立建國高級中學 113 學年度科學班甄選入學科學能力檢定 【數學能力檢定】試題本

請不要翻到次頁!!

讀完本頁說明，聽從監試委員的指示，才開始作答!

注意事項

1. 請檢查桌面上已放置「試題本」與「答案卷」各一份。
2. 請核對「答案卷」左上角的號碼與自己的甄選證號碼是否一致，若有錯誤請立即舉手請求查對更正。
3. 可利用「試題本」空白處計算。
4. 試題中參考的附圖，不一定代表實際大小。作答時，不可使用有量角功能之工具。
5. 交卷時，「試題本」務必連同「答案卷」一併送交監試人員，然後離場。
6. 故意損壞試題本(卷)，或於答案卡(卷)上挖補、汙損、折疊、作標記、顯示自己身分者，該節甄試科目不予計分。

測驗說明

1. 考試時間為 100 分鐘。
2. 「試題本」採單面印刷，共 3 頁(不含封面)。單選題共 1 題，填充題共 6 題，計算證明題共 4 題。
3. 「答案卷」採單面印刷，共 5 頁(不含封面)。

作答方式

1. 答案須依題號寫在答案卷上，否則不予計分，更正時，可以使用修正液(帶)。
2. 未使用藍、黑色鋼筆或原子筆書寫於「答案卷」，或書寫不清，致評閱人員無法辨識答案，其責任自行負責，不得提出異議。

請聽到考試開始的信號聲後，於「試題本」右上角方格內填入自己的甄選證號碼末 5 碼，再翻頁作答。

臺北市立建國高級中學 113 學年度科學班甄選入學科學能力檢定

【數學能力檢定】試題本

一、單選題：每題 7 分，共 7 分。答案須依題號寫在答案卷上，否則不予計分。

1. 歐拉公式指出，對於任意多面體，其面數 F 、邊數 E 和頂點數 V 之間滿足

$$F - E + V = 2$$

舉例來說，在正立方體中，我們有 $F = 6$ ， $E = 12$ ， $V = 8$ ，代入公式可得：

$$F - E + V = 6 - 12 + 8 = 2$$

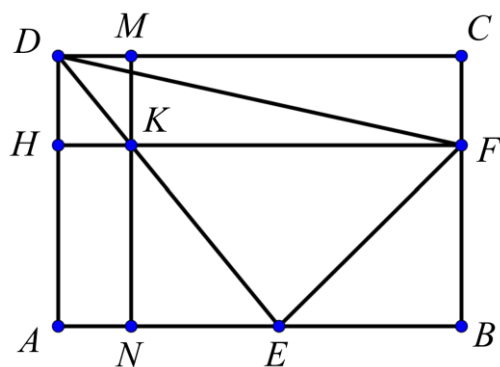
這個公式也被用來探索更多的同素異形體。例如，在化學實驗室中，除了碳 60 外，已經合成出其他類似碳 60 的分子，像是碳 88 分子，它也是由多個五邊形或六邊形組成的多面體，共有 88 個頂點，每個頂點都由三個面所共用。

試問，組成碳 88 分子的六邊形有幾個。

- (1) 30 個 (2) 31 個 (3) 32 個 (4) 33 個 (5) 34 個

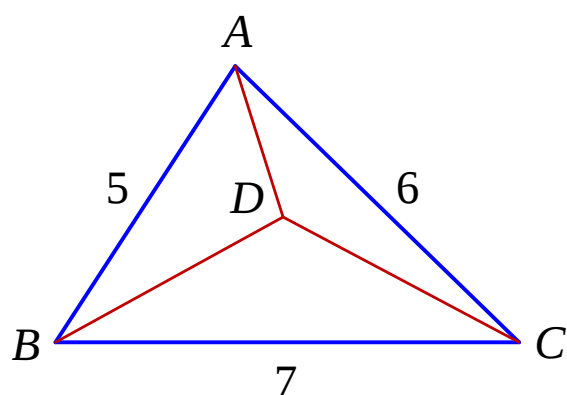
二、填充題：每題 8 分，共 48 分。答案須依題號寫在答案卷上，否則不予計分。

1. 如下示意圖，一矩形 $ABCD$ ， E, F 分別是 $\overline{AB}, \overline{BC}$ 邊上任兩點，作 $\overline{FH}$ 平行 $\overline{CD}$ ，分別交 $\overline{DA}, \overline{DE}$ 於 H, K 兩點，過 K 作 $\overline{MN}$ 平行 $\overline{BC}$ ，分別交 $\overline{CD}, \overline{AB}$ 於 M, N 兩點。設 $\overline{AE} \times \overline{CF} = 4$ ，則 $\triangle ABC$ 的面積與 $\triangle DEF$ 的面積差為_____。



2. 實數 a, b 滿足 $-2 \leq -a + b \leq 1$ 和 $-1 \leq \frac{3}{2}a + b \leq 2$ ，若 $2a + b$ 的最大值為 M ，最小值為 m ，則數對 (M, m) 為_____。

3. 平面上有一個三角形 $\triangle ABC$ ， D, E, F 分別在 $\overline{BC}, \overline{AB}, \overline{AC}$ 上，且 $\overline{DE} \parallel \overline{AC}$ 、 $\overline{DF} \parallel \overline{AB}$ 。若 $\triangle BDE$ 的面積為 π 、 $\triangle CDF$ 的面積為 4，則平行四邊形 $AEDF$ 的面積為_____。
4. x, y 為正整數，滿足 $5x^2 - 20x = 16y$ 且 $7x^2 \geq 32y$ ，試求所有數對 (x, y) 為_____。(答案不只一個)
5. 如下圖， $\triangle ABC$ 的三邊長 $\overline{AB} = 5$ 、 $\overline{BC} = 7$ 、 $\overline{CA} = 6$ ， $\triangle ABC$ 的面積為 $6\sqrt{6}$ ， D 為其內部一點滿足 $\angle CAD = \angle ABD = \angle BCD$ 。若延長 $\overline{AD}$ 交 $\triangle BCD$ 的外接圓於 E 點，則 $\triangle BCE$ 的面積為_____。



6. 將 1, 2, 3, 4, 5 這 5 個數字從左至右排成一列，並滿足下列四個條件的任何一個：
- (1) 最左邊的數字是 1
 - (2) 最左邊的兩個數字有 1 和 2
 - (3) 最左邊的三個數字有 1、2 和 3
 - (4) 最左邊的四個數字有 1、2、3 和 4
- 試求這樣的排列方法有_____種。

三、計算證明題：本大題共有四題計算證明題，必須寫出演算過程或理由，否則將予

扣分。每題配分標於題末，共 45 分。

1. 從 1 到 2024 的正整數中任選兩相異正整數 a, b ，使其滿足 $a > b$ 且相加為偶數、相減為 5 的倍數，則滿足上述條件的數對 (a, b) 有幾種？(10 分)

2. 一個二元函數 $f(x, y)$ 具有下列三個性質：
$$\begin{cases} f(0, y) = y + 1 \\ f(x + 1, 0) = f(x, 1) \\ f(x + 1, y + 1) = f(x, f(x + 1, y)) \end{cases}$$
，試回答下列問題。

(1) 試求 $f(1, 113)$ 之值。(3 分)

(2) n 為正整數，試求 $f(2, n)$ 的一般式（將 $f(2, n)$ 以 n 的函數表示）。(4 分)

(3) n 為正整數，試求 $f(3, n)$ 的一般式（將 $f(3, n)$ 以 n 的函數表示）。(6 分)

3. a, b 為 1 到 10 的正整數，若 $396a + 36b + 1$ 是完全平方數，試回答下列問題。

(1) 設 $396a + 36b + 1 = x^2$ ，試證明 x 為奇數。(3 分)

(2) 承上題，試求 x 的所有可能值。(7 分)

4. 如下圖，五邊形 $ABCDE$ 中， $\overline{BA} = \overline{AE} = \overline{ED}$ ， $\angle BAE = \angle AED$ ， $\angle ABC = 150^\circ$ ， $\angle BCD = 78^\circ$ ，

$\angle CDE = 96^\circ$ ，試回答下列問題。

(1) 試問 $ABCDE$ 當中，哪四點共圓？請寫出並證明。(5 分)

(2) 試問 $\angle ACB$ 為幾度？(7 分)

