

臺北市立建國高級中學 111 學年度科學班甄選入學科學能力檢定

【數學能力檢定】試題本

請不要翻到次頁!!

讀完本頁說明，聽從監試委員的指示，才開始作答!

注意事項

1. 請檢查桌面上已放置「試題本」與「答案卷」各一份。
2. 請核對「答案卷」左上角的號碼與自己的甄選證號碼是否一致，若有錯誤請立即舉手請求查對更正。
3. 可利用「試題本」空白處計算。
4. 試題中參考的附圖，不一定代表實際大小。作答時，不可使用有量角功能之工具。
5. 交卷時，「試題本」務必連同「答案卷」一併送交監試人員，然後離場。
6. 故意損壞試題本(卷)，或於答案卡(卷)上挖補、汙損、折疊、作標記、顯示自己身分者，該節甄試科目不予計分。

測驗說明

1. 考試時間為 100 分鐘。
2. 「試題本」採單面印刷，共 4 頁(不含封面)。多重選擇題共 2 題，填充題共 6 題，計算證明題共 3 題。
3. 「答案卷」採單面印刷，共 4 頁(不含封面)。

作答方式

1. 答案須依題號寫在答案卷上，否則不予計分，更正時，可以使用修正液(帶)。
2. 未使用藍、黑色鋼筆或原子筆書寫於「答案卷」，或書寫不清，致評閱人員無法辨識答案，其責任自行負責，不得提出異議。

請聽到考試開始的信號聲後，於「試題本」右上角
方格內填入自己的甄選證號碼，再翻頁作答。

臺北市立建國高級中學 111 學年度科學班甄選入學科學能力檢定

【數學能力檢定】試題本

一、多重選擇題：每題 7 分，共 14 分。答案須依題號寫在答案卷上，否則不予計分。

說明：

(1) 每題的五個選項各自獨立，其中至少有一個選項是正確的。每題皆不倒扣，五個選項全部答對者得 7 分，只答錯一個選項者可得 4 分，答錯兩個或兩個以上選項者不給分；所有選項均未作答者，該題以零分計算。

(2) 答錯選項的定義為「沒選正確的選項或選了不正確的選項」。

1. 如圖（僅供參考），在菱形 $ABCD$ 中，已知 $\overline{AB}=3$ ， $\overline{DF}=1$ ， $\angle DAB=60^\circ$ ， $\overline{FG}\perp\overline{BC}$ ， $\angle EFG=15^\circ$ ，請選出正確的選項。

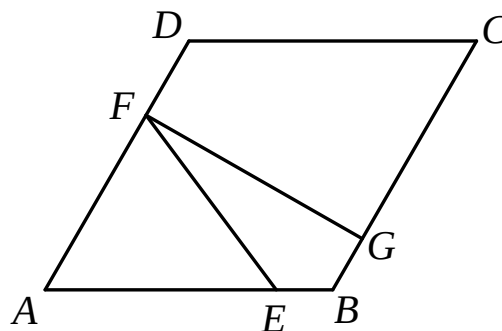
(1) $\overline{BE}=2-\sqrt{3}$ 。

(2) $\overline{BG}=\frac{3}{4}$ 。

(3) $\triangle AEF$ 面積為 $\frac{3+\sqrt{3}}{2}$ 。

(4) 四邊形 $CDFG$ 面積為 $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ 。

(5) 四邊形 $BGFE$ 面積為 $\frac{11\sqrt{3}-12}{8}$ 。



2. 已知 $a=110^5-67^5-43^5$ ， $b=110^3-67^3-43^3$ ，請選出正確的選項。

(1) a 與 b 除以 23 的餘數相同。

(2) a 的正因數中，最大的質因數比 500 還大。

(3) a 是一個 10 位數。

(4) a 能被 b 整除。

(5) $50a > b^2$ 。

二、填充題：每題 7 分，共 42 分。答案須依題號寫在答案卷上，否則不予計分。

1. 已知 9 個相異的正整數，其總和為 2022，且此 9 個正整數中，最小的 3 個數為 a_1, a_2, a_3 ，則 $a_1 + a_2 + a_3$ 的最大值為_____。

2. 在數學上，若給定一組偶數個數字的數據，定義它的「中位數」是將數據「由小到大」重新排列後，取「最中間兩數的算術平均數」。例如：給定一組 6 個數字的數據 2,4,9,6,10,1，重新排列後為 1,2,4,6,9,10，中位數為 $\frac{4+6}{2} = 5$ 。

現在有一組 136 個數字的數據依規則排列如右： $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \dots, \frac{1}{16}, \frac{2}{16}, \dots, \frac{16}{16}$ ，則其中位數為_____。（請化簡至最簡分數，否則不予計分）

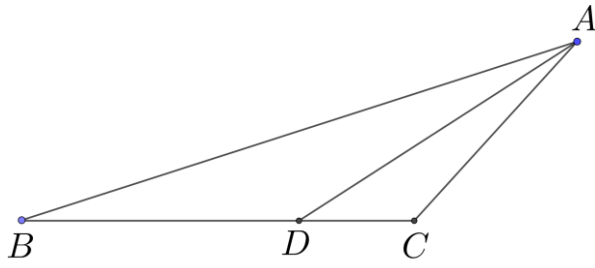
3. 設 x, y, z 為正實數，且滿足 $\begin{cases} x^2 + y^2 + 25z^2 = 6xz + 8yz \\ 3x^2 + 2y^2 + z^2 = 240 \end{cases}$ ，則序組 (x, y, z) 為_____。

4. 設 $f: N \rightarrow R$ 為正整數對應到實數的函數，且滿足下列條件：

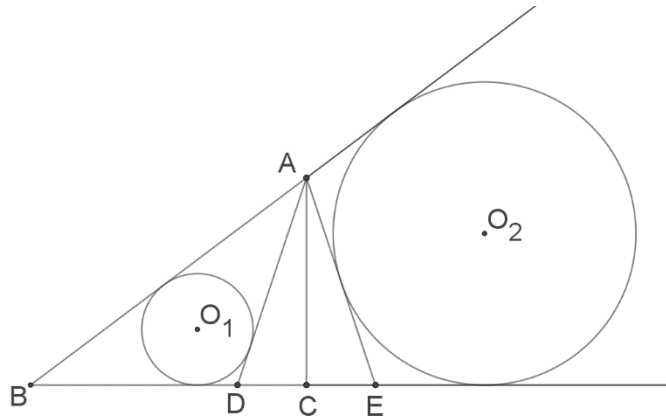
(1) $f(1) = \frac{3}{2}$ ； (2) 對所有正整數 x ，恆有 $f(x+1) = (1 + \frac{1}{x+1})f(x) + (1 + \frac{x}{2})f(1) + x^2 + 2x$ ，

則 $f(16)$ 之值為_____。

5. 如圖（僅供參考），在 $\triangle ABC$ 中， $\angle A$ 的內角平分線交 $\overline{BC}$ 於 D 點， $\overline{AD} = \sqrt{3}$ ， $\angle ADC = 30^\circ$ ， $\overline{BC} = 2$ ，則 $\triangle ABD$ 的面積為_____。



6. 如圖（僅供參考），已知 $\triangle ABC$ 的三邊長分別為 $\overline{AB} = 5$, $\overline{BC} = 4$, $\overline{CA} = 3$ ，在射線 $\overline{BC}$ 上取相異兩點 D, E 使得 $\overline{AD} = \overline{AE}$ ，若 O_1 為 $\triangle ABD$ 內切圓 C_1 的圓心， O_2 為 $\triangle ABE$ 旁切圓 C_2 的圓心，則 C_1, C_2 兩圓的半徑和為_____。

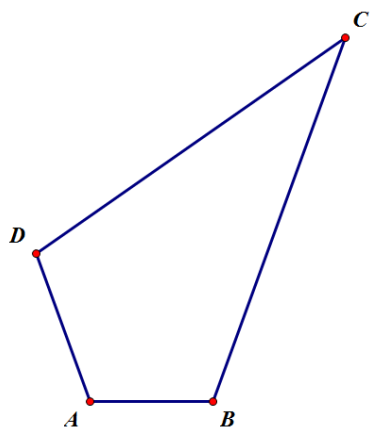


三、計算證明題：本大題共有三題計算證明題，必須寫出演算過程或理由，否則將予扣分。每題配分標於題末，共 44 分。

1. 如圖（僅供參考），在四邊形 $ABCD$ 中， $\angle DAB = \angle ABC = 110^\circ$ ， $\angle BCD = 35^\circ$ ， $\angle CDA = 105^\circ$ 。

試證明：(1)若 $\overline{AC}$ 平分 $\angle DAB$ ，則 $\angle ABD = 40^\circ$ 。(8 分)

(2)若 $\angle ABD = 40^\circ$ ，則 $\overline{AC}$ 平分 $\angle DAB$ 。(8 分)



2. 設 a, b 為正整數，且滿足 $3a^2 + a = 4b^2 + b$ 。

試證明：(1) $(a-b)(3a+3b+1)$ 是完全平方數。(4 分)

(2) $a-b$ ， $3a+3b+1$ 都是完全平方數。(10 分)

3. 在 $1, 2, 3, \dots, 2022$ 中選取若干個數，使得選取出的數滿足「任意兩數的和不能被其差整除」。

例如：只取 $1, 111, 2022$ 三個數，其中 $\frac{111+1}{111-1}, \frac{2022+111}{2022-111}, \frac{2022+1}{2022-1}$ 皆不為整數，

故這樣的取法滿足「任意兩數的和不能被其差整除」。

(1) 若只取 $125, 127, 312, 1605, 2022$ 五個數，試問這樣的取法是否滿足「任意兩數的和不能被其差整除」。(2 分)

(2) 試問最多能選取幾個數？請說明該如何選取？並證明若再多添加一個數將無法滿足題意。
(12 分)