

臺北市立建國高級中學 110 學年度科學班甄選入學科學能力檢定

【數學能力檢定】試題本

請不要翻到次頁!!

讀完本頁說明，聽從監試委員的指示，才開始作答!

注意事項

1. 請檢查桌面上已放置「試題本」與「答案卷」各一份。
2. 請核對「答案卷」左上角的號碼與自己的甄選證號碼是否一致，若有錯誤請立即舉手請求查對更正。
3. 可利用「試題本」空白處計算。
4. 試題中參考的附圖，不一定代表實際大小。作答時，不可使用有量角功能之工具。
5. 交卷時，「試題本」務必連同「答案卷」一併送交監試人員，然後離場。
6. 故意損壞試題本(卷)，或於答案卡(卷)上挖補、汙損、折疊、作標記、顯示自己身分者，該節甄試科目不予計分。

測驗說明

1. 考試時間為 100 分鐘。
2. 「試題本」採單面印刷，共 4 頁(不含封面)。多重選擇題共 2 題，填充題共 6 題，計算證明題共 3 題。
3. 「答案卷」採單面印刷，共 5 頁(不含封面)。

作答方式

1. 答案須依題號寫在答案卷上，否則不予計分，更正時，可以使用修正液(帶)。
2. 未使用藍、黑色鋼筆或原子筆書寫於「答案卷」，或書寫不清，致評閱人員無法辨識答案，其責任自行負責，不得提出異議。

請聽到考試開始的信號聲後，於「試題本」右上角
方格內填入自己的甄選證號碼，再翻頁作答。

臺北市立建國高級中學 110 學年度科學班甄選入學科學能力檢定

【數學能力檢定】試題卷

一、多重選擇題：每題 7 分，共 14 分。答案須依題號寫在答案卷上，否則不予計分。

說明：

(1) 每題的五個選項各自獨立，其中至少有一個選項是正確的。每題皆不倒扣，五個選項全部答對者得 7 分，只答錯一個選項者可得 4 分，答錯兩個或兩個以上選項者不給分；所有選項均未作答者，該題以零分計算。

(2) 答錯選項的定義為「沒選正確的選項或選了不正確的選項」。

1. 如果一個正整數 n 能夠同時**唯一**表示為 k ($k \geq 2$) 個正整數的和 $a_1 + a_2 + \cdots + a_k$ 與它們之積

$a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_k$ ，那麼此正整數稱為"好數"。例如 10 就是"好數"， $10 = 5 + 2 + 1 + 1 + 1 = 5 \times 2 \times 1 \times 1 \times 1$ ，且此種表示唯一。請選出正確的選項。

(1) 34 是"好數"

(2) 17 是"好數"

(3) 若 $n = p^2 + q^2$ ，其中 p 、 q 為相異正整數，則 n 是"好數"

(4) 若 $n = p \times q$ ，其中 p 、 q 為相異質數，則 n 是"好數"

(5) 若 $n = p \times q \times r$ ，其中 p 、 q 、 r 為兩兩相異質數，則 n 是"好數"

2. 設 a, b, c, d, e, f 是 $1, 2, 3, 4, 5, 6$ 的一個排列，且滿足下列關係式：

$$\begin{cases} c \times d < b \times f < a \times e \\ c \times e < d \times f < a \times b \\ b \times c + 1 < e \times f < a \times d \\ a \times e = d \times f \end{cases}。$$

請選出正確的選項。

(1) $a \times e = 6$

(2) $b \times c = 5$

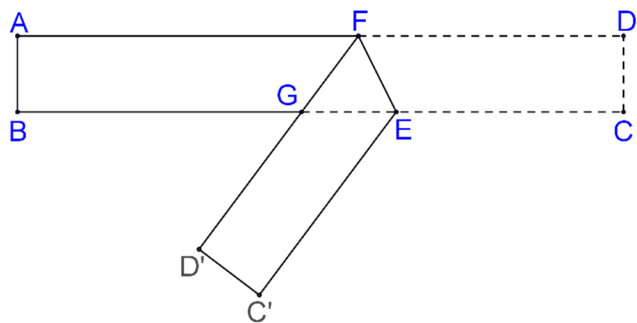
(3) $b \times f = 10$

(4) $c \times d = 8$

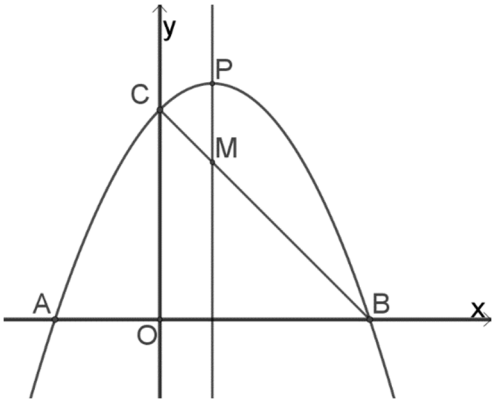
(5) $d \times f = 12$

二、填充題：每題 7 分，共 42 分。答案須依題號寫在答案卷上，否則不予計分。

1. 已知 n 個數 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 中有一部分的數為 9，其餘的數均為 -9 ，若 $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0$ 且 $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \dots + nx_n = 4356$ ，則 n 的最小值為_____。
2. 若建寶將他想的四個有理數 a_1, a_2, a_3, a_4 之任兩數乘積 $a_i \times a_j (1 \leq i < j \leq 4)$ 任意寫在黑板上，不久，一位同學不小心擦掉其中一個數字後，只剩下 $-108, -6, \frac{-1}{6}, 2, 9$ 這五個數字，則建寶想的這四個有理數總和 $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ 之值為_____。
3. 在一次線上遊戲比賽中，有 n 個女學生和 $2n$ 個男學生參加比賽，已知每個選手與其他各個選手恰比賽一次，若沒有平局，並且女學生贏的局數佔總局數的 $\frac{4}{7}$ ，則參加比賽的總人數為_____人。
4. 如圖（僅供參考），在矩形 $ABCD$ 中，已知 $\overline{AB} = 1$ ，且點 E 在 $\overline{BC}$ 上滿足 $3\overline{BE} = 5\overline{EC}$ ，將矩形沿著過點 E 的直線 EF 翻折後，點 C 、 D 分別落在邊 $\overline{BC}$ 下方的點 C' 、 D' 處，且點 C' 、 D' 、 B 在同一條直線上， $\overline{D'F}$ 與 $\overline{BE}$ 交於點 G ，則 $\triangle EFG$ 的周長為_____。



5. 如圖（僅供參考），已知一拋物線 Γ 經過 $A(-2,0), B(4,0), C(0,4)$ ，且對稱軸與 Γ 交於點 P ，與直線 BC 交於點 M ，若在 Γ 上存在點 Q ，使得 $\triangle QMB$ 的面積與 $\triangle PMB$ 的面積相同，則 Q 點坐標為_____。



6. 今有 10 位身高完全相異的同學要拍攝團體照，攝影師希望他們排成兩列五行（如下圖），且有以下的順序：
- (1) 每一列由左至右越來越高；
 - (2) 每一行的第二列都要比第一列高。

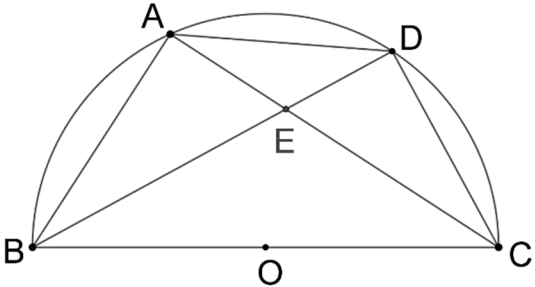
第二列					
第一列					
	第一行	第二行	第三行	第四行	第五行

那麼總共有_____種拍照的情況。

三、計算證明題：本大題共有三題計算證明題，必須寫出演算過程或理由，否則將予扣分。每題配分標於題末，共 44 分。

1. 如圖（僅供參考），線段 $\overline{BC}$ 是半圓 O 的直徑，點 D 是弧 AC 的中點，四邊形 $ABCD$ 的對角線 $\overline{AC}$ 、 $\overline{BD}$ 交於點 E 。

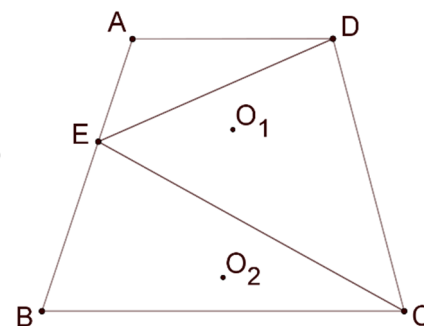
- (1) 求證： $\overline{AC} \times \overline{BC} = 2 \overline{BD} \times \overline{CD}$ ；(5 分)
- (2) 若 $\overline{AE} = 3$ ， $\overline{CD} = 2\sqrt{5}$ ，求弦 $\overline{AB}$ 和直徑 $\overline{BC}$ 的長。(6 分)



2. 如圖（僅供參考），在梯形 $ABCD$ 中，設動點 E 在線段 $\overline{AB}$ 上， O_1 與 O_2 分別是 $\triangle ADE$ 與 $\triangle BCE$ 的外心。

(1) 求證： $\triangle CDE \sim \triangle O_2O_1E$ ；(6 分)

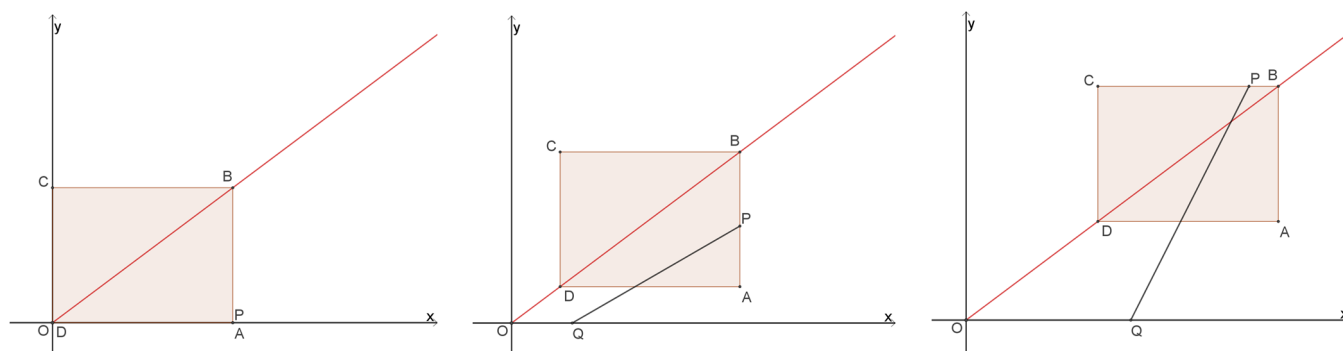
(2) 若兩底 $\overline{AD}=3, \overline{BC}=8$ ，且兩腰 $\overline{AB}=4, \overline{CD}=3$ ，求 $\overline{O_1O_2}$ 長。(6 分)



3. 如圖（僅供參考），已知矩形 $ABCD$ 的兩邊一開始在坐標軸上（點 D 在原點 O ），對角線 $\overline{BD}$ 所

在的直線方程式為 $y = \frac{3}{4}x$ ，邊 $\overline{AD}=40$ 。矩形 $ABCD$ 沿著射線 DB 方向以每秒 5 個單位長運動；

點 P 從點 A 出發，沿著 $A \rightarrow B \rightarrow C$ 的方向等速率運動；點 Q 從原點 O 出發，沿著 x 軸的正向和 P 點相同速率運動。今矩形 $ABCD$ 、 P 點與 Q 點同時出發，當 P 點到達 C 點時，矩形 $ABCD$ 、 P 點與 Q 點同時停止運動，總共經過 14 秒。設 t 表示 P 點由 A 點開始運動的時間（單位：秒），請作答下列小題。



(1) 求 $t=2$ 與 $t=10$ 時 P 點的坐標；(4 分)

(2) 請用 t 表示運動過程中 P 點的坐標，並標明 t 的範圍；(6 分)

(3) 令 $d = \overline{PQ}^2$ 為 t 的函數，請畫出函數 d 的圖形；(8 分)

(4) 在 P 點的運動過程中，是否存在三個相異的 t 值決定相同的 $\overline{PQ}^2$ 長？請說明理由。(3 分)