

臺北市立建國高級中學 109 學年度科學班甄選入學科學能力檢定

【數學能力檢定】試題本

請不要翻到次頁!!

讀完本頁說明，聽從監試委員的指示，才開始作答!

注意事項

1. 請檢查桌面上已放置「試題本」與「答案卷」各一份。
2. 請核對「答案卷」左上角的號碼與自己的甄選證號碼是否一致，若有錯誤請立即舉手請求查對更正。
3. 可利用「試題本」空白處計算。
4. 試題中參考的附圖，不一定代表實際大小。作答時，不可使用有量角功能之工具。
5. 交卷時，「試題本」務必連同「答案卷」一併送交監試人員，然後離場。
6. 依試場規則，「答案卷」不得書寫姓名、甄選證號碼或任何標記。若故意汙損「答案卷」、「試題本」，或在「答案卷」顯示自己身分者，由本校委員會依違規情節扣分。

測驗說明

1. 考試時間為 100 分鐘。
2. 「試題本」採單面印刷，共 4 頁(不含封面)。多重選擇題共 2 題，填充題共 6 題，計算證明題共 3 題。
3. 「答案卷」採單面印刷，共 4 頁(不含封面)。

作答方式

1. 答案須依題號寫在答案卷上，否則不予計分，更正時，可以使用修正液（帶）。
2. 未使用藍、黑色鋼筆或原子筆書寫於「答案卷」，或書寫不清，致評閱人員無法辨識答案，其責任自行負責，不得提出異議。

請聽到考試開始的信號聲後，於「試題本」右上角
方格內填入自己的甄選證號碼，再翻頁作答。

臺北市立建國高級中學 109 學年度科學班甄選入學科學能力檢定

【數學能力檢定】試題卷

一、多重選擇題：每題 7 分，共 14 分。答案須依題號寫在答案卷上，否則不予計分。

說明：

(1) 每題的五個選項各自獨立，其中至少有一個選項是正確的。每題皆不倒扣，五個選項全部答對者得 7 分，只答錯一個選項者可得 4 分，答錯兩個或兩個以上選項者不給分；所有選項均未作答者，該題以零分計算。

(2) 答錯選項的定義為「沒選正確的選項或選了不正確的選項」

1. 大雄使用電腦做中文打字練習，在 26 分鐘內，連續打了 3815 個字，已知他第一分鐘打了 112 個字，最後一分鐘打了 98 個字，如果計算他每一分鐘所打的字數，請選出正確的選項。

- (1) 必有連續的 2 分鐘打了至少 301 個字
- (2) 必有連續的 3 分鐘打了至少 451 個字
- (3) 必有連續的 4 分鐘打了至少 600 個字
- (4) 必有連續的 6 分鐘打了至少 902 個字
- (5) 必有連續的 8 分鐘打了至少 1202 個字

2. 如圖(參考用圖，未必精準圖形)，已知圓 Γ 是以點 O 為圓心且半徑為 6 的圓，線段 $\overline{AB}$ 與圓 Γ

交於點 C 、 D ，線段 $\overline{OB}$ 與圓 Γ 交於點 E ，設 $\overline{OA} = x$ ， $\overline{CD} = y$ ，若 $\overline{AC} = 9$ ，且 $\angle BOD = \angle OAB$ ，請選出正確的選項。

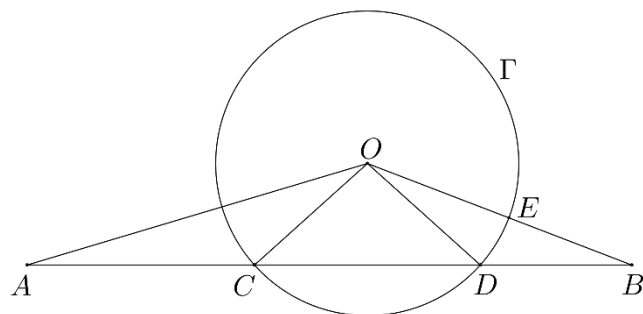
(1) $\triangle OBD$ 與 $\triangle AOC$ 相似

(2) $\overline{BD} = 5$

(3) $y = \frac{1}{8}x^2 - 13$

(4) x 可能為 11

(5) 若 $\overline{CE}$ 與 $\overline{OD}$ 垂直，則 $x > \frac{23}{2}$



二、填充題：每題 7 分，共 42 分。答案須依題號寫在答案卷上，否則不予計分。

1. 函數 $f(n)$ 為正整數 n 之各位數的數字平方和，且定義： $f_1(n) = f(n)$ ， $f_{k+1}(n) = f(f_k(n))$ ，其中 k 為任意正整數，例如： $f_1(123) = f(123) = 1^2 + 2^2 + 3^2 = 14$ ，

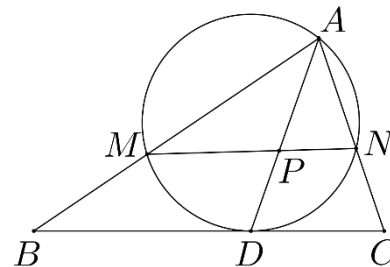
$f_2(123) = f(f_1(123)) = f(14) = 1^2 + 4^2 = 17$ ，則 $f_{201}(25)$ 之值為_____。

2. 已知 x, y 均為正整數，則滿足 $1 \leq y \leq x \leq 50$ 且 xy 是 15 的倍數的數對 (x, y) 共有_____組。

3. 已知 k, c 為實數，拋物線 $y = x^2$ 與直線 $y = (2k-1)x + c$ 交於點 (α, p) 、 (β, q) ，且 $\alpha^2 + \beta^2 = k^2 + 2k - 3$ ，則 c 之最大值為_____。

4. 已知正整數 x, y 滿足 $y = \sqrt{x-56} + \sqrt{x+40}$ ，若當 $x = a$ 時， y 有最大值 M ，則數對 (a, M) 為_____。

5. 如圖(參考用圖，未必精準圖形)，在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\overline{AB}=7$ ， $\overline{BC}=6$ ， $\overline{CA}=5$ ， $\overline{AD}$ 為 $\angle BAC$ 的角平分線，以 $\overline{AD}$ 為弦作一圓與 $\overline{BC}$ 相切，且與 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 分別交於點 M 、 N ， $\overline{AD}$ 與 $\overline{MN}$ 交於點 P ，則 $\overline{MP}$ 之長度為_____。



6. 將一些邊長為1的小正立方體拼成一個邊(稜)長為 n (n 為正整數)的大正立方體，再將此大正立方體的其中至少4個面都染成紅色，然後將大正立方體拆為原來的小正立方體，發現有1073塊小正立方體有被染了紅色，則 n 之值為_____。

三、計算證明題：本大題共有三題計算證明題，必須寫出演算過程或理由，否則將予扣分。每題配分標於題末，共44分。

1. 已知正整數 a, b 使得 $2\left(\sqrt{\frac{21}{a}} + \sqrt{\frac{21}{b}}\right)$ 為整數，則

(1) 求 $2\left(\sqrt{\frac{21}{a}} + \sqrt{\frac{21}{b}}\right)$ 的最大值。(6分)

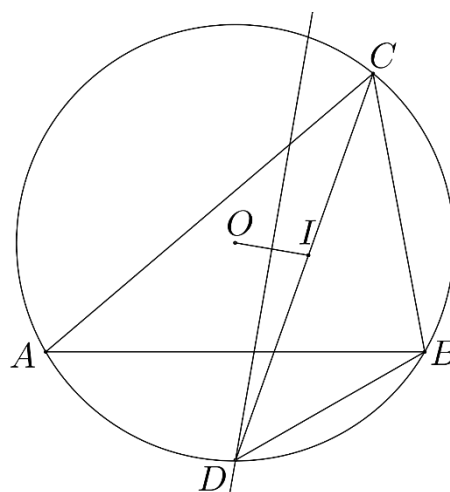
(2) 求所有滿足條件的數對 (a, b) 。(9分)

2. 如圖(參考用圖，未必精準圖形)，已知非等腰三角形 $\triangle ABC$ 的外心、內心分別為 O 、 I ，設 $\angle BAC=\alpha$ ， $\angle CBA=\beta$ ， $\angle ACB=\gamma$ ， $\angle ACB$ 的角平分線與 $\triangle ABC$ 的外接圓交於點 D ，且線段 $\overline{OI}$ 的中垂線經過點 D 。

(1) 證明： $\overline{DI}=\overline{DB}$ 。(5分)

(2) 證明： O, I, B, A 四點共圓。(4分)

(3) 證明： $\gamma-\alpha=\beta-\gamma$ 。(6分)



3. 設二次函數 $f(x)=x^2+ax+b$ (其中 a, b 為實數)，已知不等式 $|f(x)| \leq |2x^2+6x-10|$ 對任意實數 x

均成立，定義數列 $\langle a_n \rangle$ 和 $\langle b_n \rangle$ 為： $a_1=\frac{1}{3}$ ， $3a_n=f(a_{n-1})+5$ (其中 $n=2,3,4,\dots$)， $b_n=\frac{1}{3+a_n}$

(其中 $n=1,2,3,\dots$)，數列 $\langle b_n \rangle$ 的前 n 項和記為 S_n ，其前 n 項的乘積記為 P_n 。

(1) 求 a 與 b 之值。(5分)

(2) 求 S_n 與 a_{n+1} 的關係式。(5分)

(3) 證明：對任意正整數 n ， $3^{n+1}P_n+S_n$ 為定值。(4分)