

臺北市立建國高級中學 108 學年度科學班甄選入學科學能力檢定

【數學能力檢定】試題本

請不要翻到次頁!!

讀完本頁說明，聽從監試委員的指示，才開始作答！

注意事項

1. 請檢查桌面上已放置「試題本」與「答案卷」各一份。
2. 請核對「答案卷」左上角的號碼與自己的甄選證號碼是否一致，若有錯誤請立即舉手請求查對更正。
3. 可利用「試題本」空白處計算。
4. 試題中參考的附圖，不一定代表實際大小。作答時，不可使用有量角功能之工具。
5. 交卷時，「試題本」務必連同「答案卷」一併送交監試人員，然後離場。
6. 依試場規則，「答案卷」不得書寫姓名、甄選證號碼或任何標記。若故意汙損「答案卷」、「試題本」，或在「答案卷」顯示自己身分者，由本校委員會依違規情節扣分。

測驗說明

1. 考試時間為 100 分鐘。
2. 「試題本」採單面印刷，共 4 頁(不含封面)。多重選擇題共 2 題，填充題共 7 題，計算證明題共 3 題。
3. 「答案卷」採單面印刷，共 3 頁(不含封面)。

作答方式

1. 務必在「答案卷」相對應的位置作答，更正時，可以使用修正液(帶)。
2. 未使用藍、黑色鋼筆或原子筆書寫於「答案卷」，或書寫不清，致評閱人員無法辨識答案，其責任自行負責，不得提出異議。

請聽到考試開始的信號聲後，於「試題本」右上角方

格內填入自己的甄選證號碼，再翻頁作答。

一、多重選擇題：每題 7 分，共 14 分。（答案須依題號寫在答案卷上，否則不予計分）

說明：

(1) 每題的五個選項各自獨立，其中至少有一個選項是正確的。每題皆不倒扣，五個選項全部答對者得 7 分，只答錯一個選項者可得 4 分，答錯兩個或兩個以上選項者不給分；所有選項均未作

答者，該題以零分計算。

(2) 答錯選項的定義為「沒選正確的選項或選了不正確的選項」。

1. 設 2 到 48 的連續 24 個偶數之乘積為 a ，1 到 47 的連續 24 個奇數之乘積為 b ，且 $x = \frac{b}{a}$ 。

已知 x 可化簡成 $\frac{d}{c}$ ，其中 c, d 均為正整數且 c, d 互質；另知 $\sqrt{x}$ 可化簡成 $\frac{n}{m}\sqrt{p}$ ，其中 m, n, p 均

為正整數， m, n 互質且 m, p 互質。請選出正確的選項。

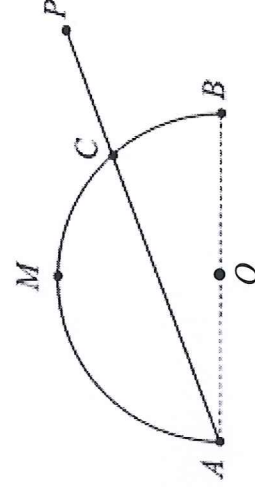
- (1) a 有 9 個質因數
- (2) 3^{22} 是 b 的因數
- (3) d 有 9 個質因數
- (4) 2^{23} 是 m 的因數
- (5) $n = 15$

2. 如圖(參考用圖，不是精準圖形)，已知 $\overline{AB}$ 為圓的直徑，

O 為其圓心，且半徑為 1。 M 為圓上一定點，且 $\angle AOM = 90^\circ$ ，

C 是在上半圓上移動的點，連接 A, C 兩點並延長至 P 點，

使得 $\overline{CP} = \overline{CB}$ 。請選出正確的選項。



(1) 若 $C \neq B$ 且 $C \neq M$ ，則 $\angle BCM$ 的度數只有兩個可能值

(2) 當 C 點移動時， P 點跟著移動所產生的軌跡在某一個固定的圓上

(3) $\triangle MBP$ 為等腰三角形

(4) $\overline{AP}$ 的最大值為 2

(5) 當 C 點由 B 移動到 A 時， P 點跟著移動所產生的軌跡長度為 $\sqrt{2}\pi$

二、填充題：每題 6 分，共 42 分。(答案須依題號寫在答案卷上，否則不予計分)

1. 已知圓 C 同時與兩坐標軸相切，且其半徑是正整數，若圓 C 通過點 $(1, k+2019)$ ，則最小的正整數 k 為_____。

2. 若三質數 a, b, c 之乘積為其和的 107 倍，且 $a \geq b \geq c$ ，則數對 $(a, b, c) =$ _____。

3. 已知 n 是正整數且 $x = 77777 \times n$ ，若 x 的每一位數字全都是 1，則 n 的最小值是_____位數。

4. 設 $\text{Min}(a, b, c, d)$ 表示四個實數 a, b, c, d 中取其最小的數。例如： $\text{Min}(\sqrt{2}, -1, 0, -1) = -1$ 。

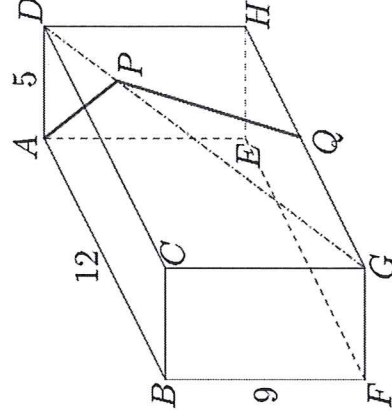
設函數 $f(x) = \text{Min}(x^2, 3x, x+2, -2x+12)$ ，其中 x 為實數。例如： $f(-1) = \text{Min}(1, -3, 1, 14) = -3$ 。
則 $f(x)$ 的最大值為_____。

5. 每年年底職業網球協會 (ATP) 在倫敦舉辦一項盛事——年終網球錦標賽 (The ATP Finals)，每個分組有 4 名選手，每兩人比賽一場並分出勝負，2018 年其中一個分組的戰績表如下：

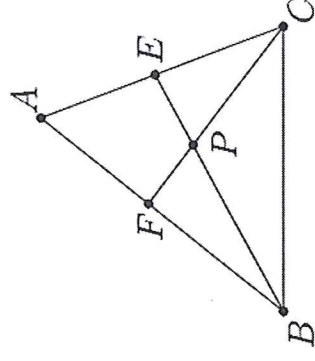
選手戰績	總戰績	對手			
		A 選手	B 選手	C 選手	D 選手
A 選手戰績	2 勝 1 敗	---	勝	勝	敗
B 選手戰績	2 勝 1 敗	敗	---	勝	勝
C 選手戰績	1 勝 2 敗	敗	敗	---	勝
D 選手戰績	1 勝 2 敗	勝	敗	敗	---

從這個表格可看出：A 擊敗 B、且 B 擊敗 D、而 D 擊敗 A，我們將這種情況稱為「三人迴圈」。

試問這 4 名選手在所有的對戰結果中 (上方的戰績表即為其中一種對戰結果，每種結果都對應六場比賽且沒有和局)，某 3 名選手會出現三人迴圈的戰績表有 _____ 種。



6. 如圖 (參考用圖，不是精準圖形)，已知在長方體 $ABCD-EFGH$ 中， $\overline{AB}=12$ 、 $\overline{BF}=9$ 、 $\overline{AD}=5$ 。若 P 點在 $\overline{DG}$ 上移動且 Q 點在 $\overline{GH}$ 上移動，則 $\overline{AP} + \overline{PQ}$ 的最小值為 _____。



7. 如圖 (參考用圖，不是精準圖形)，在 $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB}=18$ 且 $\overline{AC}=15$ ， E 點在 $\overline{AC}$ 邊上滿足 $\overline{AE}=7$ ， F 點在 $\overline{AB}$ 邊上滿足 $\overline{AF}=8$ 。設 $\overline{BE}$ 與 $\overline{CF}$ 交於 P 點，若 A 、 E 、 P 、 F 四點共圓，則 $\overline{BC}$ 的長度為 _____。

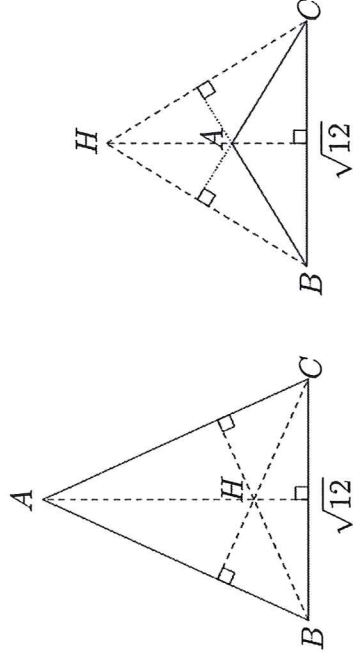
三、計算證明題：本大題共有三題計算證明題，必須寫出演算過程或理由，否則將予

扣分。每題配分標於題末，共 44 分。

1. 已知三角形的各個頂點向其對邊所作的三條垂線恰交一點，此點稱為三角形的垂心。

若 H 是等腰三角形 ABC 的垂心，其中 $\overline{AB} = \overline{AC}$ 且 $\overline{BC} = \sqrt{12}$ 。令 $\triangle ABC$ 的面積為 a 與 $\triangle HBC$ 的面積為 h ，現在讓頂點 A 到底邊 $\overline{BC}$ 的距離變小，這時 $\triangle ABC$ 與 $\triangle HBC$ 的面積乘積 $a \times h$ 之值是變小，變大，還是不變？若不變，則值為多少？(15 分)

說明：以下僅提供 A 點移動過程中的兩種情形。左圖為角 A 為銳角的情形，右圖為角 A 為鈍角的情形。(均為參考用圖，不是精準圖形)



2. 已知 n 是正整數且 $2n+1$ 為質數。證明： 1^2 、 2^2 、 3^2 、 $\dots$ 、 n^2 被 $2n+1$ 除所得的餘數皆不相同。
(15 分)

3. (1) 因式分解 $a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2b^2c^2 - 2c^2a^2$ 。(7 分)

(2) 若三正數 x, y, z 滿足 $x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2yz - 2zx < 0$,

試問是否能以 $\sqrt{x}, \sqrt{y}, \sqrt{z}$ 構成一個三角形的三邊長？請說明你的理由。(7 分)